# Zur Theorie der harmonischen Mittelpunkte.

Von Dr. **Gustav Kohn** in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juni 1883.)

Die ganze Theorie der harmonischen Mittelpunkte kann auf Betrachtung von Involutionen gegründet werden und die wichtigsten Sätze der Theorie ergeben sich dabei in überraschend einfacher und naturgemässer Weise, ohne jede Rechnung.

Als Ausgangspunkt dient die folgende Definition:

1. Ein Punkt $m$ ist harmonischer Mittelpunkt vom Grade $r$ in Bezug auf das Punktsystem $a_1, a_2 \ldots, a_n$ und den Punkt $o$ als Pol, sobald für eine Involution $n$-ten Grades (erster Stufe), für welche die Punkte $a_1, a_2 \ldots, a_n$ eine Gruppe bilden, der Punkt $o$ ein $(r+1)$-faches, der Punkt $m$ ein $(n-r+1)$-faches Element ist.[1]

Alle Punkte, von denen hier und im Folgenden die Rede ist, werden als auf demselben rationalen Träger liegend vorausgesetzt.

2. Bei der so eben für die harmonischen Mittelpunkte gegebenen Definition springt der projective Charakter derselben in die Augen.

Unmittelbar ersichtlich ist auch die Richtigkeit des folgenden Satzes:

3. „Ist $m$ harmonischer Mittelpunkt vom Grade $r$ in Bezug auf ein Punktsystem $a_1, a_2 \ldots, a_n$ und den Pol $o$, so ist $o$ harmonischer Mittelpunkt vom Grade $n-r$ in Bezug auf dasselbe Punktsystem und den Punkt $m$ als Pol."

---

[1] In dieser Notiz wird die Kenntniss der Theorie der Involutionen, wie sie Herr Professor Emil Weyr in den Sitzb. d. k. Akad. der Wissensch. 1879 und in seiner Schrift „Beiträge zur Curvenlehre", Wien, 1880, dargelegt hat, vorausgesetzt.

Wir beschäftigen uns einen Augenblick mit den harmonischen Mittelpunkten $(n-1)$-ten Grades besonders.

Ihrer Definition nach sind dieselben die Doppelpunkte der Involution $n$-ten Grades, erster Stufe, welche durch die beiden Gruppen, das Punktsystem $a_1, a_2 \ldots, a_n$ als eine, und den $n$-fach gelegten Punkt $o$ als zweite Gruppe, bestimmt ist. Daraus folgt:

4. „Es gibt $n-1$ harmonische Mittelpunkte vom Grade $n-1$ in Bezug auf ein Punktsystem $a_1, a_2 \ldots, a_n$ und einen Pol $o$."

Es hat nämlich eine Involution $n$-ten Grades bekanntlich im Allgemeinen $2(n-1)$ Doppelelemente. Unsere Involution besitzt einen $n$-fachen Punkt $o$ und in diesen fallen $n-1$ Doppelpunkte hinein.

5. „Fallen von den Punkten $a_1, a_2 \ldots, a_n$ $s$ mit dem Punkte $a$ zusammen, so fallen $s-1$ harmonische Mittelpunkte $(n-1)$-ten Grades für einen beliebigen Pol in den Punkt $a$ hinein."

Denn der Punkt $a$ ist dann ein $s$-faches Element der Involution, welche durch ihre Doppelpunkte die harmonischen Mittelpunkte vom Grade $n-1$ liefert, und absorbirt also $s-1$ Doppelelemente dieser Involution.

6. „Fällt der Pol $o$ mit dem Punkte $a$ zusammen, in welchem die $s$ Punkte $a_1, a_2 \ldots, a_s$ vereinigt liegen, so bestehen die $n-1$ harmonischen Mittelpunkte vom Grade $n-1$ in Bezug auf das Punktsystem $a_1, a_2 \ldots, a_n$ und den Pol $o$ aus den $s$ zusammenfallenden Punkten $a_1, a_2 \ldots, a_s$ und den $n-s-1$ harmonischen Mittelpunkten $(n-s-1)$-ten Grades von $o$ in Bezug auf die Punkte $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_n$."

Da nämlich zwei Gruppen der in Frage kommenden Involution, nämlich das Punktsystem $a_1, a_2 \ldots, a_n$ und der $n$-fache Punkt $o$, den Punkt $o$ $s$-fach enthalten, so wird jede Gruppe derselben diesen Punkt $s$-fach enthalten und die Involution also ausserdem nur aus einer Involution $(n-s)$-ten Grades bestehen, für welche $o$ als $(n-s)$-facher Punkt eine, das Punktsystem $a_{s+1}, a_{s+2} \ldots, a_n$ eine zweite Gruppe bildet.

7. „Ist $s = n$, so ist nur eine Gruppe für die Involution gegeben, also sowohl diese selbst, als auch ihre Doppelelemente sind unbestimmt und man kann $n-1$ beliebige Punkte als harmonische Mittelpunkte $(n-1)$-ten Grades wählen."

Das Letztere folgt daraus, dass eine Gruppe mit $n-1$ Elementenpaaren zusammen im Allgemeinen eine Involution $n$-ten Grades bestimmt.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir unserer Definition für die harmonischen Mittelpunkte $r$-ten Grades eine andere Form geben.

Dieser Definition zu Folge haben wir die Gesammtheit aller Involutionen $n$-ten Grades erster Stufe aufzufassen, für welche $o$ ein $(r+1)$-faches Element ist und die Punkte $a_1, a_2 \ldots, a_n$ eine Gruppe bilden, dann sind die $(n-r+1)$-fachen Punkte, die in irgend welchen dieser Gruppen vorkommen, die harmonischen Mittelpunkte vom Grade $r$ in Bezug auf das Punktsystem $a_1, a_2 \ldots, a_n$ und den Pol $o$. Die Gesammtheit dieser Involutionen $n$-ten Grades erster Stufe ist aber, wie man leicht übersieht, nichts anderes als eine Involution $n$-ten Grades, $(n-r)$-ter Stufe, welche die Involution $n$-ten Grades $(n-r-1)$-ter Stufe in sich enthält, deren Gruppen aus dem $(r+1)$-fach gelegten Punkt $o$ und aus $n-r-1$ beliebigen Punkten bestehen, und welche durch diese Involution $(n-r-1)$-ter Stufe und die Gruppe $a_1, a_2 \ldots, a_n$ bestimmt ist.

Wir finden also:

8. Die harmonischen Mittelpunkte $r$-ten Grades für den Pol $o$ und das Punktsystem $a_1, a_2 \ldots, a_n$ sind die $(n-r+1)$-fachen Elemente der Involution $n$-ten Grades, $(n-r)$-ter Stufe, für welche die Punkte $a_1, a_2 \ldots, a_n$ eine Gruppe bilden und für welche der $(r+1)$-fach gelegte Punkt $o$ mit je $(n-r-1)$ ganz beliebigen Punkten eine Gruppe darstellt.[1]

9. Wir heben als Folgerung hieraus besonders hervor, dass alle Gruppen dieser Involution $n$-ten Grades, $(n-r)$-ter Stufe die-

---

[1] Hieraus ergibt sich z. B. der Satz:

Nimmt man auf einer Curve dritter Ordnung, dritter Classe die Spitze als Pol an, so ist der Inflexionspunkt harmonischer Mittelpunkt ersten Grades für jede gerade Gruppe und zweiten Grades für jedes Tripel von Punkten, deren Tangenten in demselben Punkt der Ebene zusammenlaufen.

selben harmonischen Mittelpunkte $r$-ten Grades für den Pol $o$ haben. [1]

Um die harmonischen Mittelpunkte $(n-2)$-ten Grades in Bezug auf ein Punktsystem $a_1, a_2 \ldots, a_n$ und den Pol $o$ zu finden, haben wir die dreifachen Elemente der Involution $J_n^2$ $n$-ten Grades, zweiter Stufe aufzusuchen, für die $a_1, a_2 \ldots, a_n$ eine Gruppe ist und der $(n-1)$-fache Punkt $o$ mit einem beliebigen Punkt zusammen eine Gruppe bildet.

---

[1] Frägt man nach allen Systemen von $n$ Punkten, welche dieselben harmonischen Mittelpunkte $r$-ten Grades in Bezug auf den Pol $x_1 = o$ haben, wie die durch die homogene Gleichung $n$-ten Grades $f_n(x_1, x_2) = o$ dargestellte Gruppe, so gelangt man mit Leichtigkeit zur Definition 8.

Die harmonischen Mittelpunkte $r$-ten Grades in Bezug auf die Gruppe $f_n = o$ für den Pol $x_1 = o$, sind bekanntlich gegeben durch die Gleichung

$$\frac{\partial^{n-r} f_n(x_1, x_2)}{\partial x_2^{n-r}} = o$$

Durch Integration kommt:

$$f \equiv f_n(x_1, x_2) + x_1^{r+1} \varphi_{n-r-1} \; (x_1, x_2) = o$$

als Gesammtheit aller Gruppen, für welche diese harmonischen Mittelpunkte dieselben sind. Darin bedeutet $\varphi_{n-r-1}$ eine homogene Function $(n-r-1)$-ten Grades mit unbestimmten Coëfficienten. Es ist klar, dass durch diese Gleichung (1) die Involution $n$-ten Grades $(n-r)$-ter Stufe in 8. repräsentirt wird. Für einen beliebigen Punkt $x'_1, x'_2$ können wir nun durch Wahl der $n-r$ Constanten von $\varphi$ bewirken, dass die Gleichung (1) $x'_1, x'_2$ zur $(n-r)$-fachen Lösung hat. Wir haben nur die $n-r$ Gleichungen zu befriedigen:

$$f = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \ldots = \frac{\partial^{n-r-1} f}{\partial x_2^{n-r-1}} = o$$

für $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, und $x'_1, x'_2$ wird dann und nur dann eine $(n-r+1)$-fache Lösung von $f = o$ sein, wenn für diese Werthe auch noch die Gleichung befriedigt wird

$$\frac{\partial^{n-r} f}{\partial x_2^{n-r}} \equiv \frac{\partial^{n-r} f_n}{\partial x_2^{n-r}} = o.$$

Hiermit ist auch der unerlässliche Beweis für die Identität der von uns definirten harmonischen Mittelpunkte mit denen der Polarentheorie erbracht.

Zu diesem Zwecke wollen wir die zweifachen Elemente der Involution $J_n^2$ in Gruppen ordnen. Wir wählen einen beliebigen Punkt $p$ als zweifaches Element. Dadurch ist eine Gruppe der Involution $J_n^2$ bestimmt. Diese Gruppe bestimmt mit dem $n$-fach gelegten Punkte $o$ zusammen eine Involution $J_n^1$ $n$-ten Grades erster Stufe, welche ganz in der ursprünglichen Involution $J_n^2$ enthalten ist, weil die sie bestimmenden Gruppen dieser Involution angehören.

Die Involution $J_n^1$ hat $n—1$ Doppelelemente, zu welchen auch der angenommene Punkt $p$ gehört. Diese $n-1$ Doppelpunkte sind nach 9. die harmonischen Mittelpunkte $(n—1)$-ten Grades in Bezug auf alle Gruppen der Involution $J_n^1$ für den Pol $o$.

Es ist klar, dass wenn wir statt vom Punkte $p$ von irgend einem andern der $n-1$ Doppelpunkte ausgegangen wären, wir dieselbe Involution $J_n^1$ und also auch dieselbe Gruppe von $n—1$ Doppelelementen erhalten hätten. Dies genügt für den Nachweis, dass die Gruppen von Doppelpunkten, die wir so erlangen, eine Involution $J_{n-1}^1$ bilden und zwar sind diese Gruppen, wie aus der oben gemachten Bemerkung ersichtlich ist, nichts anderes als die Systeme von harmonischen Mittelpunkten in Bezug auf die sämmtlichen Gruppen der ursprünglichen Involution $J_n^2$ für den Pol $o$. Hieraus ist aber zu entnehmen, dass für die Involution $J_{n-1}^1$ der $(n—1)$-fache Punkt $o$ eine Gruppe darstellt. Denn aus 6. folgt, dass für diejenigen Gruppen von $J_n^2$, welche in den $n$-fachen Punkt $o$ und einen beliebigen andern Punkt zerfallen, dieser Punkt $(n—1)$-fach gelegt, das System der harmonischen Mittelpunkte $(n—1)$-ten Grades bildet.

Man bemerkt nun sofort, dass, wenn der Punkt $p$ ein dreifaches Element der Involution $J_n^2$ ist, derselbe zwei Doppelpunkte der Involution $J_n^1$ absorbirt, also auch für $J_{n-1}^1$ ein Doppelelement bildet und es ist umgekehrt jedes Doppelelement der Involution $J_{n-1}^1$ dreifaches Element für die Involution $J_n^2$ (5).

Es ergeben sich also die dreifachen Elemente der Involution $J_n^2$, d. h. die harmonischen Mittelpunkte vom Grade $n—2$, als Doppelelemente der Involution $J_{n-1}^1$, deren Gruppen aus den Systemen der harmonischen Mittelpunkte $(n—1)$-ten Grades in Bezug auf die Gruppen von $J_n^2$ gebildet sind. Da für die Involution $J_{n-1}^1$ der $(n—1)$-fache Punkt $o$ eine Gruppe bildet, so finden wir:

10. Man bekommt die harmonischen Mittelpunkte $(n-2)$-ten Grades in Bezug auf ein gegebenes Punktsystem und den Pol $o$, wenn man in Bezug auf die harmonischen Mittelpunkte $(n-1)$-ten Grades für dasselbe Punktsystem und denselben Pol die harmonischen Mittelpunkte $(n-2)$-ten Grades für den Pol $o$ aufsucht.

Die Zahl dieser harmonischen Mittelpunkte beträgt also $n-2$.

Jetzt kann man sofort die den Sätzen, 4, 5, 6, 7 entsprechenden für harmonische Mittelpunkte $(n-2)$-ten Grades herleiten.

Wir wollen die Schlussweise für die harmonischen Mittelpunkte $(n-3)$-ten Grades noch andeuten.

Hier lassen sich wieder die dreifachen Elemente der Involution $J^3_n$, als deren vierfache Punkte die harmonischen Mittelpunkte $(n-3)$-ten Grades nach (8) erhalten werden, in eine Involution anordnen, dadurch dass man die dreifachen Elemente einer Involution $J^2_n$, die in der ursprünglichen enthalten ist, in eine Gruppe wirft.

Die Involution $J^2_n$ ist hier so beschaffen, dass sie jede Gruppe enthält, die aus dem $(n-1)$-fach genommenen Punkte $o$ und einem beliebigen Punkte besteht. Man erkennt ebenso wie oben, dass die Involution dieser dreifachen Elemente nichts anderes ist, als der Inbegriff der harmonischen Mittelpunkte $(n-2)$-ten Grades in Bezug auf alle Gruppen der ursprünglichen Involution $J^3_n$ für den Pol $o$. Es ist wieder zu sehen, dass die Involution $J^1_{n-2}$ in $o$ einen $(n-2)$-fachen Punkt hat und man kommt also zu dem Resultat, welches wir gleich für harmonische Mittelpunkte $s$-ten Grades ansprechen.

11. „Die harmonischen Mittelpunkte $s$-ten Grades für ein gegebenes Punktsystem und den Pol $o$ erhält man, indem man in Bezug auf die harmonischen Mittelpunkte $(s+1)$-ten Grades für dieselbe Punktgruppe und denselben Pol die harmonischen Mittelpunkte $s$-ten Grades des Pols $o$ aufsucht."

Der sich sofort hieraus ergebende allgemeinere Satz braucht wohl nicht besonders ausgesprochen zu werden.

12. „Construirt man in Bezug auf die harmonischen Mittelpunkte $(n-1)$-ten Grades eines Punktsystems $a_1, a_2 \ldots, a_n$ für den Pol $o$, die harmonischen Mittelpunkte $(n-2)$-ten Grades für

den Pol $o'$, so bleibt das resultirende Punktsystem ungeändert, wenn man $o$ mit $o'$ vertauscht, denn dieses resultirende Punktsystem ist nichts anderes als das System der dreifachen Elemente der Involution $J_n^2$ $n$-ten Grades, zweiter Stufe, welche durch die 3 Gruppen bestimmt ist, nämlich 1. die Gruppe $a_1, a_2 . \quad ., a_n$, 2. den $n$-fachen Punkt $o$, 3. den $n$-fachen Punkt $o'$."

Man kann zum Beweise dieses Satzes die Doppelpunkte der Involution $J_n^2$ ganz ähnlich in Gruppen ordnen, wie dies im Vorhergehenden geschehen ist. Nimmt man nämlich einen Punkt $p$ als zweifaches Element für die Involution $J_n^2$ beliebig an, so ist durch $p$ eine Gruppe der Involution $J_n^2$ fixirt und diese Gruppe bestimmt mit dem $n$-fach gelegten Punkt $o$ zusammen eine Involution $J_n^1$, welche ganz in $J_n^2$ enthalten ist, da die sie definirenden Gruppen dieser Involution angehören. Diese Involution hat $n$—1 Doppelpunkte, von denen $p$ einer ist und diese $n$—1 Doppelpunkte sind nach unserer Definition die harmonischen Mittelpunkte ($n$—1)-ten Grades aller Gruppen, welche der Involution $J_n^1$ angehören, für den Punkt $o$ als Pol. Man übersieht wie oben, dass diese Systeme von $n$—1 Doppelpunkten eine Involution ($n$—1)-ten Grades, erster Stufe $J_{n-1}^1$ bilden und weil sie nichts anderes sind als die Systeme der harmonischen Mittelpunkte ($n$—1)-ten Grades aller Gruppen von $J_n^2$ für $o$ als Pol, so erkennt man, dass der Punkt $o'$, welcher ein $n$-facher Punkt der Involution $J_n^2$ ist, ein ($n$—1)-facher Punkt der Involution $J_{n-1}^1$ sein wird. Die dreifachen Elemente der Involution $J_n^2$ ergeben sich wieder als Doppelelemente der Involution $J_{n-1}^1$, und da diese durch die Systeme der harmonischen Mittelpunkte vom Grade $n$—1 in Bezug auf die Gruppen von $J_n^2$ für den Pol $o$ gebildet werden und da für diese Involution der ($n$—1)-fache Punkt $o'$ eine Gruppe darstellt, so sind die Doppelelemente dieser Involution $J_{n-1}^1$ nichts anderes als die harmonischen Mittelpunkte des Pols $o'$ vom Grade $n$—2 in Bezug auf die harmonischen Mittelpunkte des Grades $n$—1 für die Punkte $a_1, a_2 \ldots, a_n$ und den Pol $o$.

Es ist kaum nöthig den allgemeinen Satz, der durch Combination und wiederholte Anwendung der Sätze 11 und 12 sich ergibt, hier anzuführen.

Damit sind alle Eigenschaften der harmonischen Mittelpunkte, welche Cremona in seinem berühmten Werke über ebene Curven

durch Rechnung bewiesen hat, ohne jede Rechnung begründet. Allein nicht nur die bekannten Sätze ergeben sich von unserem Gesichtspunkt fast von selbst, man erhält auch eine Reihe neuer Sätze,[1] besonders, wenn man sich nicht, wie wir es hier gethan haben, auf das Gebiet des einstufigen rationalen Trägers beschränkt. Die speciellen Involutionen, als deren vielfache Punkte wir die harmonischen Mittelpunkte erkannt haben, verdienen ein eingehendes Studium, insbesondere wird man zur genaueren Untersuchung der singulären Elemente, welche sie ausser den vielfachen Punkten noch besitzen, so zu sagen, gedrängt.

Diese Fragen gehen über den Rahmen dieser vorläufigen Notiz heraus. Ich denke demnächst auf dieselben in einer Arbeit zurückzukommen, welche sich mit der Polarentheorie der Curven und Flächen beschäftigt.

---

[1] Wir machen hier auf die algebraische Bedeutung unserer Resultate (Verallgemeinerung des Satzes 12) aufmerksam:

Es sei $a_x^n \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n$ in der bekannten symbolischen Schreibweise eine beliebige Form $n$-ten Grades. Dann ist für jedes Lösungssystem $y=\eta$, $z=\zeta$, $t=\tau$ der symbolischen Gleichung

$$1) \qquad a_y^k a_z^l \ldots a_t^r = o \qquad (k+l+\ldots+r=n)$$

$a_x^n$ darstellbar in der Form

$$2) \qquad a_x^n \equiv a_{1x}^{k-1} (x\eta)^{n-k+1} + a_{2x}^{l-1} (x\zeta)^{n-l+1} + \ldots + a_{\rho x}^{r-1} (x\tau)^{n-r+1}$$

und umgekehrt, wenn die Identität 2) statt hat, so bilden $\eta, \zeta, \ldots, \tau$ ein Lösungssystem der Gleichung 1). In dem speciellen Falle $k=l=\ldots=r=1$ haben wir eine Darstellung von $a_x^n$ als Summe von $n$-ten Potenzen vor uns (cf. Rosanes, Crelle, Bd. 75, 76) und damit den Satz, dass jeder Punkt einer conjugirten Gruppe harmonischer Mittelpunkt für die übrigen in Bezug auf die ursprüngliche Gruppe $a_x^n = o$ ist, ein Resultat, welches sofort zur Reye'schen Polarentheorie im binären Gebiet führt. (cf. Reye, Crelle, Bd. 72, 82.)

---